CAPÍTULO 12

REGRA DA CADEIA

12.1 Introdução

Em aulas passadas, aprendemos a regra da cadeia para o caso particular em que se faz a composição entre uma função escalar de várias variáveis f e uma função vetorial de uma variável real g. Vamos aproveitar para rever este resultado.

TEOREMA 12.1.1: (Regra da Cadeia - composição de uma função escalar de várias variáveis com uma função vetorial de uma variável real) Considere as funções $f : Dom(f) \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ e $g : Dom(g) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$. Suponha que f é diferenciável no aberto $A \subseteq Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^p$ e que a função g é diferenciável no intervalo aberto $I \subset Dom(g) \subseteq \mathbb{R}$. Além disso, suponha que $g(t) \in A$, para todo $t \in I \subset Dom(g)$. Nestas condições, a função $f \circ g$ é diferenciável em I e

$$(f \circ g)'(t) = \nabla f(g(t)) \cdot g'(t), \quad t \in I,$$

onde $(\cdot)$ é o produto escalar e $g'(t)$ é o vetor derivada de g em t.

Vamos agora aprender a regra da cadeia na sua forma geral.

12.2 Regra da Cadeia

A regra da cadeia para funções vetoriais de várias variáveis preserva o mesmo enunciado simples que vimos em Cálculo 1A, onde o produto comum é substituído por um produto matricial. Entretanto, é importante ressaltar que devemos tomar cuidado com as dimensões.

TEOREMA 12.2.1: (Regra da Cadeia - Funções Vetoriais de Várias Variáveis) Considere as funções $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ e $G : Dom(G) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Suponha que $Im(G) \subseteq Dom(F)$ e seja $X_0 \in A(\text{aberto}) \subseteq Dom(G)$. Neste caso, se G é uma função diferenciável em X_0 e F é uma função diferenciável em $G(X_0)$, então a função $F \circ G : Dom(G) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em X_0 e

$$D(F \circ G)(X_0) = DF(G(X_0)).DG(X_0),$$

onde (.) é um produto entre matrizes.

Observação 12.2.1: Observe que $DF(G(X_0)) \in \mathcal{M}_{m\times p}$, $DG(X_0) \in \mathcal{M}_{p\times n}$ e $D(F \circ G)(X_0) \in \mathcal{M}_{m\times n}$.

Vamos começar os exemplos enquadrando-os primeiro em casos particulares. Iniciaremos com o exemplo visto na introdução.

12.3 Primeiro Caso Particular: $n = 1$ e $m = 1$

Neste caso, temos que f e g são as seguintes funções:

$$\begin{array}{rcl} f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X = (x_1, x_2, ..., x_p) & \mapsto & f(X) = f(x_1, x_2, ..., x_p) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} g : Dom(g) \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ t & \mapsto & g(t) = (g_1(t), g_2(t), ..., g_p(t)) \end{array}.$$

Desta forma, temos que

$$Df(X) = \left(\begin{array}{cccc} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(X) & \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(X) & \dots & \dfrac{\partial f}{\partial x_p}(X) \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{1\times p}$$

e

$$Dg(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2'(t) \\ \vdots \\ g_p'(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p\times 1}.$$

Vamos então considerar a composta $f \circ G$, que é dada por

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(g_1(t), g_2(t), ..., g_p(t)).$$

Vamos ainda definir a função h, conforme dado abaixo,

$$h(t) \triangleq (f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(g_1(t), g_2(t), ..., g_p(t)).$$

Observe que h é a função real de variável real dada por

$$\begin{array}{rcl} h : Dom(h) \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & h(t) = f(g_1(t), g_2(t), ..., g_p(t)) \end{array},$$

de modo que $h'(t)$ é um escalar ($h'(t) \in \mathcal{M}_{1\times 1}$).

Para determinar $h'(t)$, aplicamos a regra da cadeia e encontramos que

$$\begin{aligned} h'(t) &= Df(g(t)).Dg(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(g(t)) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(g(t)) & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_p}(g(t)) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ g_2'(t) \\ \vdots \\ g_p'(t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(g(t))g_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(g(t))g_2'(t) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_p}(g(t))g_p'(t). \end{aligned}$$

Conforme já vimos na aula de funções vetoriais de uma variável real é conveniente considerar a matriz coluna $Dg(t)$ como um vetor e desenhá-lo com sua origem no ponto imagem $g(t)$. Pois, neste caso, quando não é nulo, o vetor $Dg(t)$ fornece o vetor tangente à curva imagem da função g no ponto $g(t)$. Procedendo então desta forma, observe que se escrevermos $Dg(t)$, que é uma matriz $p \times 1$, como um vetor, i.e. $g'(t) = (g_1'(t), g_2'(t), ..., g_p'(t))$ (conforme feito na aula de funções vetoriais de uma variável real), podemos escrever h' como

$$h'(t) = Df(g(t)).\, g\,'(t) = \nabla f(g(t)) \cdot g'(t),$$

onde o primeiro produto (.) é um produto entre matrizes e o segundo produto ($\cdot$) é o produto escalar. Observe que, para não sobrecarregar a notação, é necessário ter atenção com o significado de $g'(t)$, pois, dependendo do contexto, ele pode ser uma matriz $p \times 1$ ou um vetor.

Escrita da forma acima, temos que a regra da cadeia para a composta entre uma função escalar de várias variáveis f e uma função vetorial de uma variável real g, toma exatamente o formato visto como um caso particular da regra da cadeia, conforme mencionado anteriormente.

Como já exercitamos bastante este caso particular, vamos passar ao próximo caso particular.

12.4 Segundo Caso Particular: $n = 2$, $m = 1$ e $p = 2$

Neste caso, temos que f e G são as seguintes funções:

$$\begin{array}{rcl} f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} G : Dom(G) \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u, v) & \mapsto & G(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) \end{array} .$$

Desta forma, temos que

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 2}$$

e

$$DG(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}.$$

Vamos então considerar a composta $f \circ G$, que é dada por

$$(f \circ G)(u,v) = f(G(u,v)) = f(x(u,v), y(u,v))$$

e vamos definir a função h como

$$h(u,v) \stackrel{\triangle}{=} (f \circ G)(u,v) = f(G(u,v)) = f(x(u,v), y(u,v)).$$

Observe que h é a função real de duas variáveis reais dada por

$$\begin{array}{rcl} h : Dom(G) \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & h(u,v) \end{array},$$

de modo que $Dh(u,v) \in \mathcal{M}_{1\times 2}$.

Portanto, pela regra da cadeia, segue que

$$\begin{aligned} Dh(u,v) &= Df(G(u,v)).DG(u,v) \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x(u,v), y(u,v)) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x(u,v), y(u,v)) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como a derivada da função

$$\begin{array}{rcl} h : Dom(G) \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & h(u,v) \end{array}$$

é dada pela matriz

$$Dh(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial h}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 2},$$

temos que

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial y}{\partial u}(u,v) \quad (1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \quad (2)$$

Observação 12.4.1: Observe que, para facilitar a memorização, também podemos expressar em palavras os resultados obtidos em (1) e (2) como:

" derivada parcial de h com respeito à variável u é IGUAL derivada parcial de f com respeito a sua primeira variável (avaliada em $G(u,v)$) VEZES a derivada parcial com respeito à variável u da função que ocupa a posição da primeira variável MAIS derivada parcial de f com respeito a sua segunda variável (avaliada em $G(u,v)$) VEZES a derivada parcial com respeito à variável u da função que ocupa a posição da segunda variável."

" derivada parcial de h com respeito à variável v é IGUAL derivada parcial de f com respeito a sua primeira variável (avaliada em $G(u,v)$) VEZES a derivada parcial com respeito à variável v da função que ocupa a posição da primeira variável MAIS derivada parcial de f com respeito a sua segunda variável (avaliada em $G(u,v)$) VEZES a derivada parcial com respeito à variável v da função que ocupa a posição da segunda variável."

Exemplo 12.4.1: Seja $h(u,v) = f(u^2+v^2, uv)$, onde f é uma função diferenciável. Determine as derivadas parciais de h em função das derivadas parciais de f.

Solução: Vamos introduzir a função vetorial $G(u,v) = (u^2+v^2, uv)$, de modo que $h(u,v) = f(G(u,v)) = f(u^2+v^2, uv)$. Observe que a função vetorial G é diferenciável, uma vez que suas funções coordenadas são diferenciáveis, pois são funções polinomiais. Além disso, temos que f é uma função diferenciável, por hipótese. Desta forma, podemos aplicar a regra da cadeia.

1^a Opção: Nesta primeira opção, vamos calcular todas as multiplicações matriciais envolvidas na regra da cadeia. Para o cálculo de Df, vamos supor que f é função das variáveis x e y, i.e. $f = f(x,y)$. Neste caso, aplicando a regra da Cadeia, temos que

$$Dh(u,v) = Df(G(u,v)).DG(u,v),$$

onde

$$Dh(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial h}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix},$$

$$DG(u,v) = \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ v & u \end{pmatrix}$$

e

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix},$$

de modo que

$$\begin{aligned} Df(G(u,v)) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v)) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,uv) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,uv) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Desta forma, segue que

$$\begin{aligned} Dh(u,v) &= Df(G(u,v)).DG(u,v) \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,uv) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,uv) \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2u & 2v \\ v & u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2u\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + v\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & 2v\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + u\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Resulta portanto, que

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial u}(u,v) &= 2u\,\frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,uv) + v\,\frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,uv) \\ \frac{\partial h}{\partial v}(u,v) &= 2v\,\frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,uv) + u\,\frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,uv). \end{aligned}$$

2^a Opção: Como segunda opção, vamos aplicar diretamente os resultados obtido em (1) e (2). Para esta solução, vamos continuar supondo que f é função das variáveis x e y, i.e. $f = f(x,y)$. Desta forma, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,uv)\frac{\partial}{\partial u}(u^2+v^2) + \frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,uv)\frac{\partial}{\partial u}(uv) \\ &= 2u\,\frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,uv) + v\,\frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,uv) \\ \frac{\partial h}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,uv)\frac{\partial}{\partial v}(u^2+v^2) + \frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,uv)\frac{\partial}{\partial v}(uv) \\ &= 2v\,\frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,uv) + u\,\frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,uv). \end{aligned}$$

♡

Exemplo 12.4.2: Seja $g(u,v) = f((uv)^2, \sqrt{e^{u+2v}})$, onde f é uma função diferenciável. Determine as derivadas parciais de g em função das derivadas parciais de f.

Solução: Vamos introduzir a função vetorial $H(u,v) = ((uv)^2, \sqrt{e^{u+2v}})$, de modo que $g(u,v) = f(H(u,v))= f((uv)^2, \sqrt{e^{u+2v}})$. Observe que a função vetorial H é diferenciável, uma vez que suas funções coordenadas são diferenciáveis, pois sua primeira função coordenada é uma função polinomial e sua segunda função coordenada é formada pela composta da função raiz quadrada com uma exponencial e com uma função polinomial. Além disso, temos que f é uma função diferenciável, por hipótese. Desta forma, podemos aplicar a regra da cadeia.

1^a Opção: Nesta primeira opção, vamos calcular todas as multiplicações matriciais envolvidas na regra da cadeia. Para o cálculo de Df, vamos supor que f é função das variáveis x e y, i.e. $f = f(x,y)$. Neste caso, aplicando a regra da Cadeia, temos que

$$Dg(u,v) = Df(H(u,v)).DH(u,v),$$

onde

$$\begin{aligned} Dg(u,v) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}, \\ DH(u,v) &= \begin{pmatrix} 2uv^2 & 2u^2v \\ \dfrac{e^{u+2v}}{2\sqrt{e^{u+2v}}} & \dfrac{2e^{u+2v}}{2\sqrt{e^{u+2v}}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2uv^2 & 2u^2v \\ \dfrac{\sqrt{e^{u+2v}}}{2} & \sqrt{e^{u+2v}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix},$$

de modo que

$$\begin{aligned} Df(G(u,v)) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v)) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}((uv)^2, \sqrt{e^{u+2v}}) & \dfrac{\partial f}{\partial y}((uv)^2, \sqrt{e^{u+2v}}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Desta forma, segue que

$$\begin{aligned} Dg(u,v) &= Df(H(u,v)).DH(u,v) \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}((uv)^2, \sqrt{e^{u+2v}}) & \dfrac{\partial f}{\partial y}((uv)^2, \sqrt{e^{u+2v}}) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2uv^2 & 2u^2v \\ \dfrac{\sqrt{e^{u+2v}}}{2} & \sqrt{e^{u+2v}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Resulta portanto, que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) &= 2uv^2\,\frac{\partial f}{\partial x}((uv)^2,\sqrt{e^{u+2v}}) + \frac{\sqrt{e^{u+2v}}}{2}\,\frac{\partial f}{\partial y}((uv)^2,\sqrt{e^{u+2v}})\\
\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) &= 2u^2v\,\frac{\partial f}{\partial x}((uv)^2,\sqrt{e^{u+2v}}) + \sqrt{e^{u+2v}}\,\frac{\partial f}{\partial y}((uv)^2,\sqrt{e^{u+2v}}).
\end{aligned}$$

2^a Opção: Como segunda opção, vamos aplicar diretamente os resultados obtido em (1) e (2). Para esta solução, vamos continuar supondo que f é função das variáveis x e y, i.e. $f = f(x,y)$. Desta forma, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}((uv)^2,\sqrt{e^{u+2v}})\frac{\partial}{\partial u}((uv)^2) + \frac{\partial f}{\partial y}((uv)^2,\sqrt{e^{u+2v}})\frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{e^{u+2v}})\\
&= 2uv^2\,\frac{\partial f}{\partial x}((uv)^2,\sqrt{e^{u+2v}}) + \frac{\sqrt{e^{u+2v}}}{2}\,\frac{\partial f}{\partial y}((uv)^2,\sqrt{e^{u+2v}})\\
\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}((uv)^2,\sqrt{e^{u+2v}})\frac{\partial}{\partial v}((uv)^2) + \frac{\partial f}{\partial y}((uv)^2,\sqrt{e^{u+2v}})\frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{e^{u+2v}})\\
&= 2u^2v\,\frac{\partial f}{\partial x}((uv)^2,\sqrt{e^{u+2v}}) + \sqrt{e^{u+2v}}\,\frac{\partial f}{\partial y}((uv)^2,\sqrt{e^{u+2v}}).
\end{aligned}$$

$\heartsuit$

Exemplo 12.4.3: Seja $h(x,y) = f(y^2+g(x,y), 1+g(1,x+y))$, onde f e g são funções de classe C^1.
a) Determine $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y)$.
b) Sabendo que $g(1,0) = 0$ e $g(1,1) = 2$, mostre que

$$\frac{\partial h}{\partial x}(1,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,3)\frac{\partial g}{\partial x}(1,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,3)\frac{\partial g}{\partial y}(1,1).$$

Solução:

a) Vamos introduzir as funções vetoriais $W(x,y) = (y^2+g(x,y), 1+g(1,x+y))$ e $K(x,y) = (1, x+y)$ e a função real $l(x,y) = g(K(x,y)) = g(1,x+y)$, de modo que $h(u,v) = f(W(x,y)) = f(y^2+g(x,y), 1+l(x,y)) = f(y^2+g(x,y), 1+g(K(x,y)))$ $= f(y^2+g(x,y), 1+g(1,x+y))$. Como f e g são de classe C^1, por hipótese, temos que f e g são diferenciáveis. Observe que a função vetorial W também é diferenciável, uma vez que suas funções coordenadas são diferenciáveis. De fato, a primeira função coordenada de W é a soma de uma função polinomial com a função g e a segunda função coordenada de W é a soma da função constante 1 com a função l, que é uma função diferenciável, pois é a composta da função g com a função K, que também é diferenciável, pois suas funções coordenadas são funções polinomiais. Desta forma, como todas as funções envolvidas são diferenciáveis, podemos aplicar a regra da cadeia.

1^a Opção: Nesta primeira opção, vamos calcular todas as multiplicações matriciais envolvidas na regra da cadeia. Para o cálculo de Df e Dg, vamos supor que f e g são funções das variáveis x e y, i.e. $f = f(x,y)$ e $g = g(x,y)$. Neste caso, aplicando a regra da Cadeia, temos que

$$Dh(x,y) = Df(W(x,y)).DW(x,y),$$

onde

$$Dh(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} DW(u,v) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(y^2+g(x,y)\right) & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(y^2+g(x,y)\right) \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(1+l(x,y)) & \dfrac{\partial}{\partial y}(1+l(x,y)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) & 2y+\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) \\ \\ \dfrac{\partial l}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial l}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix},$$

de modo que

$$\begin{aligned} Df(W(x,y)) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(y^2+g(x,y),1+l(x,y)) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(y^2+g(x,y),1+l(x,y)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(y^2+g(x,y),1+g(1,x+y)) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(y^2+g(x,y),1+g(1,x+y)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Desta forma, segue que

$$\begin{aligned} Dh(x,y) &= Df(W(x,y)).DW(x,y) \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(W(x,y)) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(W(x,y)) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) & 2y+\dfrac{\partial l}{\partial y}(x,y) \\ \\ \dfrac{\partial l}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial l}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Resulta portanto, que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(W(x,y))\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(W(x,y)\ \frac{\partial l}{\partial x}(x,y) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(y^2+g(x,y), 1+l(x,y))\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(y^2+g(x,y), 1+l(x,y))\ \frac{\partial l}{\partial x}(x,y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(W(x,y))\ \left(2y + \frac{\partial l}{\partial x}(x,y)\right) + \frac{\partial f}{\partial y}(W(x,y)\ \frac{\partial l}{\partial y}(x,y) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(y^2+g(x,y), 1+g(1,x+y))\ \left(2y + \frac{\partial l}{\partial y}(x,y)\right) + \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(y^2+g(x,y), 1+g(1,x+y))\ \frac{\partial l}{\partial y}(x,y).
\end{aligned}$$

Como estamos somente interessados em $\dfrac{\partial h}{\partial x}$, podemos abandonar o cálculo de $\dfrac{\partial h}{\partial y}$. Mas, para determinarmos $\dfrac{\partial h}{\partial x}$, precisamos ainda determinar $\dfrac{\partial l}{\partial x}(x,y)$. Devemos então aplicar novamente a regra da cadeia. Para isto, temos que

$$Dl(x,y) = Dg(K(x,y)).DK(x,y),$$

onde

$$Dl(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial l}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial l}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
DK(u,v) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}(1) & \dfrac{\partial}{\partial y}(1) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial x}(x+y) & \dfrac{\partial}{\partial y}(x+y) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\[2ex] 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

e

$$Dg(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix},$$

de modo que

$$Dg(K(x,y)) \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x}(1,x+y) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(1,x+y) \end{pmatrix}.$$

Desta forma, segue que

$$\begin{aligned}
Dl(x,y) &= Dg(K(x,y)).DK(x,y)\\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x}(K(x,y)) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(K(x,y)) \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 0\\ \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x}(1,x+y) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(1,x+y) \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 0\\ \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial y}(1,x+y) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(1,x+y) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Resulta portanto, que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial g}{\partial y}(1,x+y)\\
\frac{\partial l}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial g}{\partial y}(1,x+y)
\end{aligned}$$

Uma vez que determinamos que $\dfrac{\partial l}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial g}{\partial y}(1,x+y)$, voltando então à equação de $\dfrac{\partial h}{\partial x}$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(y^2+g(x,y),1+l(x,y))\,\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)+\\
&\quad +\frac{\partial f}{\partial y}(y^2+g(x,y),1+l(x,y))\,\frac{\partial l}{\partial x}(x,y)\\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(y^2+g(x,y),1+g(1,x+y))\,\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)+\\
&\quad +\frac{\partial f}{\partial y}(y^2+g(x,y),1+v)\,\frac{\partial g}{\partial y}(1,x+y)
\end{aligned}$$

2^a Opção: Como segunda opção, vamos aplicar diretamente os resultados obtido em (1) e (2). Para esta solução, vamos continuar supondo que f e g são funções das variáveis x e y, i.e. $f = f(x,y)$ e $g = g(x,y)$. Desta forma, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(y^2+g(x,y),1+g(1,x+y))\frac{\partial}{\partial x}(y^2+g(x,y))+\\
&\quad +\frac{\partial f}{\partial y}(y^2+g(x,y),1+g(1,x+y))\frac{\partial}{\partial x}(1+g(1,x+y))\\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(y^2+g(x,y),1+g(1,x+y))\frac{\partial}{\partial x}(g(x,y))+\\
&\quad +\frac{\partial f}{\partial y}(y^2+g(x,y),1+g(1,x+y))\frac{\partial}{\partial x}(g(1,x+y))\\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(y^2+g(x,y),1+g(1,x+y))\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)+\\
&\quad +\frac{\partial f}{\partial y}(y^2+g(x,y),1+g(1,x+y))\frac{\partial}{\partial x}(g(1,x+y))
\end{aligned}$$

Para calcular $\frac{\partial}{\partial x}(g(1,x+y))$, devemos novamente aplicar a regra da cadeia. Desta forma, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(g(1,x+y)) &= \frac{\partial g}{\partial x}(1,x+y)\frac{\partial}{\partial x}(1)+\frac{\partial g}{\partial y}(1,x+y)\frac{\partial}{\partial x}(x+y)\\
&= \frac{\partial g}{\partial y}(1,x+y).
\end{aligned}$$

Podemos concluir então, que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(y^2+g(x,y),1+g(1,x+y))\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)+\\
&\quad +\frac{\partial f}{\partial y}(y^2+g(x,y),1+g(1,x+y))\frac{\partial g}{\partial y}(1,x+y).
\end{aligned}$$

b) Substituindo os valores dados na equação acima, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x}(1,0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(g(1,0),1+g(1,1))\frac{\partial g}{\partial x}(1,0)+\frac{\partial f}{\partial y}(g(1,0),1+g(1,1))\frac{\partial g}{\partial y}(1,1)\\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(0,3)\frac{\partial g}{\partial x}(1,0)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,3)\frac{\partial g}{\partial y}(1,1)
\end{aligned}$$

$\heartsuit$

Exemplo 12.4.4: Seja $g(u,v)=f(u^2+v^2,u^2v)$, onde f é uma função de classe C^2.
a) Determine as derivadas parciais de g em função das derivadas parciais de f.
b) Determine a derivada direcional de g no ponto $(1,1)$ na direção do vetor $\vec{u}=(1,-1)$, sabendo que $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)=3$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)=5$.
c) Determine $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$ em função das derivadas parciais de f.

Solução:

a) Vamos introduzir a função vetorial $h(u,v) = (u^2+v^2, u^2v)$, de modo que $g(u,v) = f(h(u,v)) = f(u^2+v^2, u^2v)$. Como f é de classe C^2, por hipótese, temos que f é de classe C^1 e, portanto, diferenciável. Observe que função vetorial h também diferenciável, uma vez que suas funções coordenadas são diferenciáveis, pois são funções polinomiais. Desta forma, podemos aplicar a regra da cadeia e aplicar diretamente os resultados obtido em (1) e (2). Supondo que f é função das variáveis x e y, i.e. $f = f(x,y)$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,u^2v)\frac{\partial}{\partial u}(u^2+v^2) + \frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,u^2v)\frac{\partial}{\partial u}(u^2v) \\
&= 2u\,\frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,u^2v) + 2uv\,\frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,u^2v).
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,u^2v)\frac{\partial}{\partial v}(u^2+v^2) + \frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,u^2v)\frac{\partial}{\partial v}(u^2v) \\
&= 2v\,\frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,u^2v) + u^2\,\frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,u^2v).
\end{aligned}$$

b) Como g é uma função diferenciável, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1) &= \nabla g(1,1)\cdot \vec{u} \\
&= \left(\frac{\partial g}{\partial u}(1,1)\ ,\ \frac{\partial g}{\partial v}(1,1)\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).
\end{aligned}$$

Substituindo (u,v), por $(1,1)$ nas equações de $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)$ e $\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$ obtidas no item (a), encontramos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial u}(1,1) &= 2\,\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) + 2\,\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) \\
\frac{\partial g}{\partial v}(1,1) &= 2\,\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,1).
\end{aligned}$$

Desta forma, substituindo os valores dados, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial u}(1,1) &= 6+10 = 16 \\
\frac{\partial g}{\partial v}(1,1) &= 6+5 = 11.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1) &= \nabla g(1,1)\cdot\vec{u}\\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial u}(1,1)\ ,\ \frac{\partial g}{\partial v}(1,1)\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ &= (16,11)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ &= \frac{16}{\sqrt{2}}-\frac{11}{\sqrt{2}}\\ &= \frac{5}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

c) Observe que, como $g(u,v)=f(h(u,v))$, onde $h(u,v)=(u^2+v^2,u^2v)$, temos que g é de classe C^2, pois f é de classe C^2 , por hipótese, e h é de classe C^2, pois suas funções coordenadas são de classe C^2. Sendo assim, sabemos que $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}$ existe. Para determinar $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}$, vamos derivar $\dfrac{\partial g}{\partial u}$. Desta forma, utilizando o resultado obtido em (a), temos que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)(u,v)=\frac{\partial}{\partial u}\left(2u\,\frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,u^2v)+2uv\,\frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,u^2v)\right).$$

Como f é de classe C^2, temos que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ são de classe C^1 e , portanto, diferenciáveis. Portanto, podemos aplicar a regra da soma, a regra do produto e a regra da cadeia mais uma vez. Desta forma, temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) &= \frac{\partial}{\partial u}\left(2u\,\frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,u^2v)+2uv\,\frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,u^2v)\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial u}\left(2u\,\frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,u^2v)+2uv\,\frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,u^2v)\right).\end{aligned}$$

Vamos então aplicar a regra da cadeia para calcular separadamente $\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,u^2v)\right)$ e $\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,u^2v)\right)$. Desta forma, temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,u^2v)\right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u^2+v^2,u^2v)\frac{\partial}{\partial u}(u^2+v^2)+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(u^2+v^2,u^2v)\frac{\partial}{\partial u}(u^2v)\\ &= 2u\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u^2+v^2,u^2v)+2uv\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(u^2+v^2,u^2v)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,u^2v)\right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(u^2+v^2,u^2v)\frac{\partial}{\partial u}(u^2+v^2)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u^2+v^2,u^2v)\frac{\partial}{\partial u}(u^2v)\\ &= 2u\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(u^2+v^2,u^2v)+2uv\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u^2+v^2,u^2v).\end{aligned}$$

Substituindo então as expressões de $\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,u^2v)\right)$ e $\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,u^2v)\right)$ encontradas, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} &= 2\,\frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,u^2v)+2u\left(2u\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u^2+v^2,u^2v)+2uv\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(u^2+v^2,u^2v)\right)+\\ &\quad +2v\,\frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,u^2v)+2uv\left(2u\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(u^2+v^2,u^2v)+2uv\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u^2+v^2,u^2v)\right).\end{aligned}$$

♡

Exemplo 12.4.5: Seja $h(x,y)=f(3+x^2y,f(y,x^3))$, onde f é uma função de classe C^1.
a) Determine $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y)$ em função das derivadas parciais de f.
b) Conhecendo os valores abaixo, determine a equação do plano tangente o gráfico de h no ponto $(1,2,4)$.

$$f(2,1)=3,\quad f(5,3)=4,\quad \frac{\partial f}{\partial x}(2,1)=4,\quad \frac{\partial f}{\partial x}(5,3)=6,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)=2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(5,3)=1.$$

Solução:

a) Vamos introduzir as funções vetoriais $g(x,y)=(3+x^2y,f(y,x^3))$ e $g_1(x,y)=(y,x^3)$, de modo que $h(x,y)=f(g(x,y))=f(3+x^2y,f(g_1(x,y)))=f(3+x^2y,f(y,x^3))$. Como f é de classe C^1, por hipótese, temos que f é diferenciável. Observe que a função vetorial g também é diferenciável, uma vez que suas funções coordenadas são diferenciáveis. De fato, a primeira função coordenada de g é uma função polinomial e a segunda função coordenada de g é a composta da função f com a função g_1, que também é diferenciável, pois suas funções coordenadas são funções polinomiais. Desta forma, podemos aplicar a regra da cadeia e aplicar diretamente os resultados obtido em (1) e (2). Vamos supor que f é função das variáveis x e y, i.e. $f=f(x,y)$, e calcular inicialmente $\dfrac{\partial h}{\partial x}$. Neste caso, temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(3+x^2y,f(y,x^3))\frac{\partial}{\partial x}(3+x^2y)+\\ &\quad +\frac{\partial f}{\partial y}(3+x^2y,f(y,x^3))\frac{\partial}{\partial x}(f(y,x^3))\\ &= 2xy\,\frac{\partial f}{\partial x}(3+x^2y,f(y,x^3))+\\ &\quad +\frac{\partial f}{\partial y}(3+x^2y,f(y,x^3))\frac{\partial}{\partial x}(f(y,x^3)).\end{aligned}$$

Para calcular $\dfrac{\partial}{\partial x}(f(y,x^3))$, devemos novamente aplicar a regra da cadeia. Desta forma, temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(f(y,x^3)) &= \frac{\partial f}{\partial x}(y,x^3)\frac{\partial}{\partial x}(y)+\frac{\partial f}{\partial y}(y,x^3)\frac{\partial}{\partial x}(x^3)\\ &= 3x^2\frac{\partial f}{\partial y}(y,x^3).\end{aligned}$$

Podemos concluir então que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) &= 2xy\,\frac{\partial f}{\partial x}(3+x^2y, f(y,x^3)) + \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(3+x^2y, f(y,x^3))\frac{\partial}{\partial x}(f(y,x^3)) \\
&= 2xy\,\frac{\partial f}{\partial x}(3+x^2y, f(y,x^3)) + \\
&\quad + 3x^2\,\frac{\partial f}{\partial y}(3+x^2y, f(y,x^3))\frac{\partial f}{\partial y}(y,x^3).
\end{aligned}$$

Vamos calcular agora $\dfrac{\partial h}{\partial y}$. Neste caso, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(3+x^2y, f(y,x^3))\frac{\partial}{\partial y}(3+x^2y) + \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(3+x^2y, f(y,x^3))\frac{\partial}{\partial y}(f(y,x^3)) \\
&= x^2\,\frac{\partial f}{\partial x}(3+x^2y, f(y,x^3)) + \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(3+x^2y, f(y,x^3))\frac{\partial}{\partial y}(f(y,x^3)).
\end{aligned}$$

Para calcular $\dfrac{\partial}{\partial y}(f(y,x^3))$, devemos novamente aplicar a regra da cadeia. Desta forma, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}(f(y,x^3)) &= \frac{\partial f}{\partial x}(y,x^3)\frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial f}{\partial y}(y,x^3)\frac{\partial}{\partial y}(x^3) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(y,x^3).
\end{aligned}$$

Podemos concluir então que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) &= x^2\,\frac{\partial f}{\partial x}(3+x^2y, f(y,x^3)) + \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(3+x^2y, f(y,x^3))\frac{\partial}{\partial y}(f(y,x^3)) \\
&= x^2\,\frac{\partial f}{\partial x}(3+x^2y, f(y,x^3)) + \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(3+x^2y, f(y,x^3))\frac{\partial f}{\partial x}(y,x^3).
\end{aligned}$$

b) Temos que a equação do plano tangente ao gráfico de h no ponto $(1,2,4)$ é dada por

$$z = h(1,2) + \frac{\partial h}{\partial x}(1,2)(x-1) + \frac{\partial h}{\partial y}(1,2)(y-2).$$

Como o ponto $(1,2,4)$ pertence ao gráfico de h se e só se $h(1,2)=4$, para encontrarmos a equação do plano tangente ao gráfico de h no ponto $(1,2,4)$, basta encontrarmos

$\dfrac{\partial h}{\partial x}(1,2)$ e $\dfrac{\partial h}{\partial y}(1,2)$. Sendo assim, vamos substituir os valores dados nas equações de $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial h}{\partial y}$) encontradas acima. Desta forma, temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x}(1,2) &= 4\,\frac{\partial f}{\partial x}(5,f(2,1)) + 3\,\frac{\partial f}{\partial y}(5,f(2,1))\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)\\ &= 4\,\frac{\partial f}{\partial x}(5,3) + 3\,\frac{\partial f}{\partial y}(5,3)\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)\\ &= 4\,.\,6 + 3\,.\,2\,.\,1)\\ &= 30\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial y}(1,2) &= \frac{\partial f}{\partial x}(5,f(2,1)) + \frac{\partial f}{\partial y}(5,f(2,1))\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(5,3) + \frac{\partial f}{\partial y}(5,3)\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)\\ &= 6 + 1\,.\,4\\ &= 10.\end{aligned}$$

Portanto, temos que a equação do plano tangente ao gráfico de h no ponto $(1,2,4)$ é dada por

$$z = 4 + 30(x-1) + 10(y-2).$$

$\heartsuit$

12.5 Exemplos Gerais

Vamos agora fazer alguns exemplos envolvendo composições de funções mais gerais.

Exemplo 12.5.1: Sejam $f\,(x,y) = (x^2\ ,\ xy)$, $h\,(u,v) = (uv\ ,\ u^2)$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diferenciável e $F = h\circ g\circ f$. Calcule $DF\,(2,1)$ sabendo que $g\,(4,2) = (3,1)$, $g\,(2,1) = (4,2)$ e que $Dg\,(4,2) = \begin{pmatrix}0 & \pi\\ 1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$ e $Dg\,(2,1) = \begin{pmatrix}0 & \sqrt{2}\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

Solução: Pela regra da cadeia, temos que

$$DF\,(2,1) = Dh\,(g\,(f\,(2,1)))\cdot Dg\,(f\,(2,1))\cdot Df\,(2,1)\,.$$

Como $f\,(2,1) = (4,2)$, temos que $g\,(f\,(2,1)) = g\,(4,2) = (3,1)$ e $Dg\,(f\,(2,1)) = Dg\,(4,2) = \begin{pmatrix}0 & \pi\\ 1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$. Desta forma, segue que

$$DF\,(2,1) = Dh\,(3,1)\cdot\begin{pmatrix}0 & \pi\\ 1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}\cdot Df\,(2,1)\,.$$

Além disso, temos que $Dh\left(u,v\right) = \begin{pmatrix} v & u \\ 2u & 0 \end{pmatrix}$ e $Df\left(x,y\right) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$, de modo que $h'\left(3,1\right) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ e $Df\left(2,1\right) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Segue portanto que

$$\begin{aligned} DF\left(2,1\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \pi & 2\pi \\ 4+\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \pi + 12 + 3\sqrt{2} & 2\pi + 6\sqrt{2} \\ 6\pi & 12\pi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

♡

Exemplo 12.4.2: Considere a função $f(u,v) = (u^3 v\ ,\ 2v^2 - 6u^2\ ,\ 3uv\ ,\ u^2+v^2)$. Seja $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^1 e seja F a função definida por $F = g \circ f$.

a) Determine $DF(1,2)$, sabendo que $g(2,2,6,5) = (2,3)$ e que $Dg(2,2,6,5)$ é uma das matrizes a seguir: $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

b) Determine a função afim que melhor aproxima F numa vizinhança do ponto $(1,2)$.

Solução:

a) Em primeiro lugar, observe que g é uma função de classe C^1, por hipótese, o que significa que g é diferenciável. Da mesma forma, temos que f é de classe C^1, pois suas funções coordenadas são polinomiais, o que significa que f também é diferenciável. Sendo assim, como f e g são diferenciáveis, temos que $F = g \circ f$ é diferenciável e, além disso, podemos aplicar a regra da cadeia para obter $DF(1,2)$. No Exemplo 12.4.2, obtivemos que

$$DF\left(1,2\right) = Dg\left(f\left(1,2\right)\right) \cdot Df\left(1,2\right)$$

Como $f\left(1,2\right) = (2,2,6,5)$, temos que $Dg\left(f\left(2,1\right)\right) = Dg\left(2,2,6,5\right) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, pois, como $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, temos que $Dg(2,2,6,5) \in \mathcal{M}_{2\times 4}$. Desta forma, segue que

$$\begin{aligned} DF\left(1,2\right) &= Dg\left(2,2,6,5\right) \cdot Df\left(1,2\right) \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot Df\left(1,2\right). \end{aligned}$$

Além disso, temos que $Df\left(u,v\right) = \begin{pmatrix} 3u^2v & u^3 \\ -12u & 4v \\ 3v & 3u \\ 2u & 2v \end{pmatrix}$, de modo que $Df\left(1,2\right) = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -12 & 8 \\ 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Segue portanto que

$$\begin{aligned} DF(1,2) &= \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot Df(1,2) \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -12 & 8 \\ 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) Temos que a transformação afim que melhor aproxima a função F uma vizinhança de ponto $(1,0)$ é dada por

$$L(u,v) = F(1,2) + DF(1,2) \cdot \begin{pmatrix} u-1 \\ v-2 \end{pmatrix}, \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Já calculamos $DF(1,2)$ no item anterior. Falta calcularmos $F(1,2)$.

$$F(1,2) = g(f(1,2)) = g(2,2,6,5) = (2,3).$$

Segue, portanto, que

$$\begin{aligned} L(u,v) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u-1 \\ v-2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2(u-1) - 5(v-2) \\ v-2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 - 2u + 2 - 5v + 10 \\ 3 + v - 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2u - 5v + 14 \\ v+1 \end{pmatrix}, \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

$\heartsuit$